المثالية في نصف الشبكة العليا

ان مفهوم المثالية هو نفس مفهوم المرشح مع أخذ الترتيب المعاكس

تعريف:

يسمى المجموعة الجزئية غير الخالية I من نصف الشبكة العليا L (مثالية) إذا حققت ما يلي:

1) إذا كانت $x \in I$ و $y \leq x$ فإن $y \in I$

2) إذا كانت $x, y \in I$ فإن $x \vee y \in I$

سوف نرى في الفصل التالي كيف أن مفهوم المثالية هنا يرتبط بمفهوم المثالية في الشبكات ان الكثير من المرشحات ... بالنسبة للمثاليات مباشرة وسوف نذكرها باختصار

المثالية في نصف شبكة عليا جزئية

- نقول عن المثالية I انها فعلية إذا كانت $I \neq E$ وهذا يكافئ $1 \notin I$
- E هي أكبر مثالية في E وتحتوي على جميع المثاليات
- إذا كانت $a \in E$ فإن $I_a = \{x \in E : x \leq a\}$ تكون مثالية وتدعى مثالية أساسية مولدة بـ a
- إذا كانت $G \subseteq E$ و I_G هي عبارة عن تقاطع جميع المثاليات الحاوية على G فإن I_G تكون مثالية وتدعى المثالية المولدة بـ G وهي أصغر مثالية تحوي G يمكن أن نعرف I_G أيضاً بأنها مجموعة العناصر x من E التي تحقق الشرط:

يوجد عدد منته من عناصر G ليكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ بحيث يكون $x \leq a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$

- كل مثالية ذات مولد منته تكون أساسية وفي نصف الشبكة العليا المنتهية جميع المثاليات أساسية
- نقول عن المجموعة G بأنها $\vee$ غير متوافقة ($\vee$ incompatible) إذا كانت تولد مثالية غير فعلية وهذا القول يكافئ أنه يوجد عدد منته من عناصر G $a_1, a_2, \ldots, a_n$ بحيث يكون $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ والمجموعة الجزئية التي لا تكون $\vee$ غير متوافقة تكون
- مجموعة المثاليات الفعلية المرتبة بعلاقة الاحتواء وتكون شبه استقرائية يتيح لنا استنتاج وجود مثاليات عظمى أي كل مثالية فعلية تكون محتواة في مثالية عظمى

- يمكن القول بأن I مثالية عظمى إذا تحقق الشرطين

(1) I مثالية فعلية

(2) من أجل $x \notin I$ يوجد $y \in I$ بحيث يكون $x \vee y = 1$

حالة الشبكة :

في الشبكة الدنيا نبين الوقت مفهومي المرشحة والمثالية

ملاحظة :

في الشبكة أي مرشحة (أو أي مثالية) تكون شبكة جزئية وذلك لأنه إذا كانت F مرشحة فوجدنا سابقاً بأنه نصف شبكة دنيا جزئية ولكن هي أيضاً نصف شبكة عليا جزئية لأنه إذا فرضنا $x, y \in F$ فإن $x \le x \vee y \Rightarrow x \vee y \in F$

أمثلة :

(1) لتكن E مجموعة غير منتهية

- أسرة المجموعات الجزئية المنتهية المتممة من E تكون مرشحة في $P(E)$

- أسرة المجموعات الجزئية المنتهية من E تكون مثالية في $P(E)$

(2) في شبكة قواسم 60 أي $D(60)$ كل المرشحات والمثاليات تكون أساسية

المرشحات الأولية هي

$F_6 = \{6, 12, 30, 60\}$

$I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

$F_{15} = \{15, 30, 60\}$

$I_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$

الشبكات التامة :

لقد رأينا في نصف الشبكة الدنيا (أو نصف الشبكة العليا) بأن كل مجموعة منتهية غير خالية تملك حد أدنى أعظمي (حد أعلى أصغري) ولكن هذا غير صحيح بالحالة العامة من أجل المجموعات الجزئية غير المنتهية

مثال:

في الشبكة $(N^*, |)$ مجموعة الأعداد الزوجية ليس لها حد أعلى أصغري لكنها تملك حد أدنى أعظمي هو 2)

نصف الشبكة العليا التامة:

تعريف: نسمي المجموعة $(E, \leq)$ "نصف شبكة عليا تامة" إذا كانت أي مجموعة جزئية A من E تملك حد أعلى أصغري في E ونرمز له بـ $\sup_E A = \vee_E A$ (أو اختصاراً $\vee A$)

ملاحظات:

- كل نصف شبكة عليا تامة هي نصف شبكة عليا
- كل نصف شبكة عليا تامة تملك: عنصر أكبر $1 = \vee E$ ، عنصر أصغر $0 = \vee \phi$

مبرهنة:

في أي نصف شبكة عليا تامة: كل مجموعة جزئية منها A تملك حد أدنى أعظمي

البرهان:

- إذا كانت $A = \phi \Leftarrow \inf_E A = 1$
- إذا كانت $A \neq \phi$ لتكن M مجموعة الحدود الدنيا للمجموعة A (يوجد على الأقل العنصر 0)

نفرض أن $I = \vee M$

I هي حد أدنى للمجموعة A وذلك لأنه:

إذا كانت $x \in A$ بالنسبة لأي $m \in M$ فإن $x \geq m$ ⇐ x هو حد أعلى للمجموعة M ⇐ $x \geq \vee M = I$ ⇐ I حد أدنى للمجموعة A

لنفرض أن J هو حد أدنى للمجموعة A فإن $J \in M$ ⇐ $J \leq \vee M = I$ ⇐ I هو حد أدنى أعظمي للمجموعة A ومنه نستنتج أن $I = \inf_E A$

ملاحظات:

نستطيع أيضاً أن نعرف نصف الشبكة الدنيا التامة بالشكل التالي:

أي مجموعة جزئية من نصف الشبكة الدنيا تملك حد أدنى أعظمي ونرمز له بـ $\inf_E A = \wedge_E A$

المبرهنة السابقة بأن نعرف الشبكة العليا التامة، كذلك نعرف الشبكة الدنيا التامة وشبكاتها بعد أن نبين التعريف

يمكننا أن نعرف أيضاً الشبكة التامة بأنها الشبكة التي تحقق الشرط:
أي مجموعة جزئية منها A تقبل نهاية حد أعلى أصغري وحد أدنى أعظمي مثلما أنه بإمكاننا أن نعطي المبرهنة

مبرهنة:
إذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً يوجد تكافؤ بين القضايا التالية
E نصف شبكة عليا تامة
E نصف شبكة دنيا تامة
E شبكة تامة
بالإضافة إلى ذلك فإن

$\bigwedge_E A = \bigvee_E \{$ مجموعة الحدود السفلى لـ A $\}$

$\bigvee_E A = \bigwedge_E \{$ مجموعة الحدود العليا لـ A $\}$

أمثلة:
كل شبكة منتهية تكون تامة
من أجل أي مجموعة E فإن الشبكة $(P(E), \subseteq)$ تكون تامة، إذا كانت المجموعة $A \subseteq P(E)$ فإن

$$\bigwedge A = \bigcap_{X \in A} X \qquad \bigvee A = \bigcup_{X \in A} X$$

الشبكتين $(\mathbb{N}, \leq)$ و $(\mathbb{N}^*, |)$ لا تكونا تامتين

الشبكة التوزيعية:
لتكن $(E, \leq)$ شبكة ما معرفة بقانوني التشكيل الداخليين $\wedge, \vee$ نقول عنها إنها توزيعية إذا كان كل منهما يقبل التوزيع مع الآخر أي إذا تحققت المساواتان:

$D_1)\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \; ; \; \forall x, y, z \in E$

أي أن $\wedge$ تقبل التوزيع مع $\vee$

$D_2)\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \; ; \; \forall x, y, z \in E$

أي $\vee$ تقبل التوزيع مع $\wedge$

ملاحظة:

الشرطان D_1 ، D_2 متكافئان

نفرض أن D_1 متحقق

$(x\vee y)\wedge(x\vee z)=[(x\vee y)\wedge x]\vee[(x\vee y)\wedge z]$

$=x\vee[(x\vee y)\wedge z]$　　حسب قانون الامتصاص

$=x\vee[(x\wedge z)\vee(y\wedge z)]$　　حسب D_1

$=[x\vee(x\wedge z)]\vee(y\wedge z)$　　تجميعية

$=x\vee(y\wedge z)$　　حسب الامتصاص

نفرض أن D_2 متحقق

$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=[(x\wedge y)\vee x]\wedge[(x\wedge y)\vee z]$　　حسب D_2

$=x\wedge[(x\wedge y)\vee z]$　　الامتصاص

$=x\wedge[(x\vee z)\wedge(y\vee z)]$　　حسب D_2

$=[x\wedge(x\vee z)]\wedge(y\vee z)$　　تجميعية

$=x\wedge(y\vee z)$　　الامتصاص

ملاحظة:

في أي شبكة يكون الشرطان التاليان متحققين

$D'_1)\quad x\wedge(y\vee z)\geq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\ ;\quad x,y,z\in E$

$D'_2)\quad x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)\quad x,y,z\in E$

وذلك لأن:

$$\left.\begin{array}{l}x\wedge(y\vee z)\geq x\wedge y\\ x\wedge(y\vee z)\geq x\wedge z\end{array}\right\}\Rightarrow x\wedge(y\vee z)\geq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

توضيح:

$$\left.\begin{array}{l}a\leq b\\ c\leq d\end{array}\right\}\Rightarrow a\vee c\leq b\vee d$$

$$\left.\begin{array}{l}x\vee(y\wedge z)\leq x\vee y\\ x\vee(y\wedge z)\leq x\vee z\end{array}\right\}\Rightarrow x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

أي أن الشرطين D_1 ، D_2 يكافئان الشرطين …

$D''_1)\ x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \forall x, y, z \in E$

$D''_2)\ x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \forall x, y, z \in E$

بمقارنة الملاحظتين السابقتين نستنتج أن الشروط الأربعة D_1, D_2, D''_1, D''_2 متكافئة

تعريف : شبكة

تدعو الشبكة بأنها توزيعية إذا كان كل من قانوني التشكيل $\wedge, \vee$ يقبل التوزيع على الآخر ، وهنا يكفي التحقق بأن تتحقق أي من الشروط الأربعة المتكافئة D_1, D_2, D''_1, D''_2

أمثلة عن الشبكات التوزيعية :

- الشبكة $(D(E), \subseteq)$ تكون شبكة توزيعية لأن كلاً من $\cap, \cup$ يقبل التوزيع على الآخر
- السلسلة تشكل سلسلة تكون شبكة توزيعية إذ يجب أن نبرهن مثلاً

$$\min(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z))$$

يكفي من أجل ذلك أخذ الست حالات الممكنة

$x \leq y \leq z \qquad y \leq x \leq z \qquad x \leq z \leq y$

$x \geq y \geq z \qquad y \geq x \geq z \qquad x \geq z \geq y$

ملاحظة :

كل شبكة جزئية من شبكة توزيعية تكون توزيعية أيضاً . ولكن يمكن أن تكون المجموعة الجزئية من الشبكة التوزيعية هي شبكة (ملاحظة ليست شبكة جزئية) ففي هذه الحالة ليست بالضرورة أن تكون توزيعية

مثال :

لتكن الشبكة $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ والمرتبة بعلاقة يقسم . هذه الشبكة ليست توزيعية وذلك لأن :

(مخطط: 30 في الأعلى، 2 ، 3 ، 5 في الوسط، 1 في الأسفل)

$$\left.\begin{array}{l} 2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2 \\ (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 \end{array}\right\} \neq$$

نلاحظ أن المرتبتين M و N جميعهما وحيدة الشبكة ليست شبكة جزئية من $(L,\leq)$
ولا تحتوي شبكة دنيا جزئية

الشبكات المعيارية :

نعرف فئة من الشبكات التي تحقق خاصية أضعف من التوزيعية

تعريف :

تسمى الشبكة E معيارية إذا كان من أجل أي ثلاث عناصر x,y,z يتحقق الشرط التالي:

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

ملاحظة :

(1) كل شبكة توزيعية تكون معيارية وذلك لأن :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \forall x,y,z \in E$$

فإذا فرضنا أن $x \leq z$ فإن

$$x \vee z = z$$

بالتعويض بالعلاقة السابقة نجد:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

أي أن الشبكة E معيارية.

لكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة

مثال:

الشبكة السابقة $E=\{1,2,3,5,30\}$ المرتبة بعلاقة تقسيم ليست توزيعية ولكنها معيارية

$2 \leq 30$: $2 \vee (3 \wedge 30) = 2 \vee 3 = 30$ ، $(2 \vee 3) \wedge 30 = 30 \wedge 30 = 30$ ⟸ $=$

$1 \leq 3$: $1 \vee (2 \wedge 3) = 1 \vee 1 = 1$ ، $(1 \vee 2) \wedge 3 = 2 \wedge 3 = 1$ ⟸ $=$

(2) كل شبكة جزئية من شبكة معيارية تكون معيارية أيضاً

محاضرات الدفتر

القسم : السنة : المادة : المحاضرة

(13) توجد شبكات ليست معيارية

مثال:

لتكن $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ المرتبة بعلاقة يقسم

$$2 \leq 4 \quad 2 \vee (5 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2$$
$$(2 \vee 5) \wedge 4 = 20 \wedge 4 = 4 \quad \neq$$

الشبكة ليست معيارية

ملاحظة:

كي تكون الشبكة E معيارية يلزم ويكفي أن تتحقق من أجل أي عناصر x, y, z الشرط

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

أو x, y غير متقارنين .

البرهان:

إذا كانت E معيارية لنفرض أن $x \wedge z = y \wedge z$ ، $x \vee z = y \vee z$ ولنفرض جدلاً أن x, y متقارنين ومختلفين فعلى سبيل المثال إذا كان $y \leq x$ فيكون

$$x \vee (z \wedge y) = x \vee (x \wedge z) = x$$
$$(x \vee z) \wedge y = (y \vee z) \wedge y = y$$

وهذا يناقض كون E معيارية $x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y$ فالفرض الجدلي باطل أي أن $y = x$ أو x, y غير متقارنين

العكس: لنفرض أن المذكور في المرحلة محقق ولتكن x, y, z ثلاثة عناصر من E بحيث يكون $x \leq z$ ولنفرض أن

$$a = x \vee (y \wedge z) \quad \& \quad b = (x \vee y) \wedge z$$

حسب الشرط D_2 يكون

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

وبما أن $x \leq z$ فإن $x \vee z = z$ وبالتعويض في المتراجحة الأخيرة نجد أن

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z \Rightarrow a \leq b$$

$a \wedge y = [x \vee (y \wedge z)] \wedge y \geq [x \vee (y \wedge z)] \wedge (y \wedge z) = y \wedge z$

$b \wedge y = [(x \vee y) \wedge z] \wedge y \leq y \wedge z \quad \} \Rightarrow a \wedge y \geq b \wedge y$ (1)

ولكن $a \leq b \Rightarrow a \wedge y \overset{(2)}{\leq} b \wedge y \Rightarrow$ من (1) و (2) نجد أن $\boxed{a \wedge y = b \wedge y}$. I

$a \vee y = [x \vee (y \wedge z)] \vee y \geq x \vee y$

$b \vee y = [(x \vee y) \wedge z] \vee y \leq [(x \vee y) \wedge z] \vee (x \vee y) = x \vee y \} \Rightarrow$

ومنه $a \vee y \overset{(3)}{\geq} b \vee y$ ولكن $a \leq b \Rightarrow a \vee y \overset{(4)}{\leq} b \vee y$ من (3) و (4) نجد

II $\boxed{a \vee y = b \vee y}$ فهذا يؤدي إلى أن a و b متممتان للعنصر y ومنه

$a = b$ وبالتالي يتحقق